ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen Final 15/07/2025

APELLIDO DEL ALUMNO: .... **NOMBRE:** ....

CORRIGIÓ: .... **REVISÓ:** ....

T1		T2		P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

T1) Indique si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. **Fundamente claramente la respuesta en cada caso.**

a. La derivada direccional de $h(x,y) = f(xy\,, x-y)$ en el punto (1,2) en la dirección hacia el punto (3,5) con matriz Jacobiana $Df(u,v) = (2u+v \quad u)$ es igual $-\frac{11}{5}$.

b. La función $f: U \subset R^2 \to R / \quad f(x,y) = (x^2+y^4)\sqrt{xy}$ admite en (0,0) un punto de mínimo global (absoluto) en U.

T2) **a**. Defina función potencial de un campo vectorial.

b. Compruebe que el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(2x, 2y)$ admite función potencial φ en $R^2 \setminus \{(0,0)\}$. Sabiendo que $\varphi(1,0) = 3$, halle la ecuación de la línea equipotencial que pasa por el punto (1,0).

P1) Calcule la circulación del campo $\vec{F}$ de clase $C^1(R^3)$ a lo largo de la curva γ sabiendo que la matriz Jacobiana de $\vec{F}$es: $\begin{pmatrix} y & x & -2 \\ 2x & y^3 & 1 \\ x & 0 & z^2 \end{pmatrix}$ y además $\gamma = \begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2=y \end{cases}$. Debe indicar claramente en el gráfico el sentido de recorrido elegido para γ.

P2) Halle la ecuación cartesiana de la curva solución de $y'' - y = 4e^x$ que pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente 2.

P3) Calcule el volumen del cuerpo $H = \{(x,y,z) \in R^3 \;\; / \;\; (x-1)^2 + y^2 \le z \le 5-2x\}$.

P4) Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x\,, xz)$ a través de la superficie abierta $x^2+y^2 = 2x$ con $z \le 4-(x^2+y^2)$ en el primer octante.

AM2 | Final | Hoja 1 | 15-7-25

T1 V o F

a) La derivada direccional de $h(x,y) = f(xy, x-y)$ en el punto $(1,2)$ en la dirección hacia el punto $(3,5)$ con matriz jacob. $Df(u,v) = [2u+v \quad u]$ $f \in C^1$ es igual a $-\frac{11}{5}$

F

$\bar g(1,2) = (2,-1)$

$\bar g(x,y) \overset{\text{dif}}{=} (xy, x-y) \rightarrow h(x,y) = f(\bar g(x,y))$

h es dif $\longrightarrow Dh(x,y) = Df(\bar g(x,y)) \cdot D\bar g(x,y)$

$\downarrow$

$Dh(1,2) = Df(\bar g(1,2)) \cdot D\bar g(1,2) =$

I $h'((1,2),\check v) = \nabla h(1,2) \cdot \check v$ $\quad = Df(2,-1) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$

$D\bar g(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [8 \quad 1]$

$\boxed{\nabla h(1,2) = (8;1)}$

$Df(2,-1) = [2\times 2 - 1 \quad 2]$

$\vec v = \underset{\text{FIN}}{(3,5)} - \underset{\text{INICIO}}{(1,2)} = (2,3) \longrightarrow \check v = \frac{(2,3)}{\sqrt{2^2+3^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \check v$

I $h'((1,2),\check v) = (8;1)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \boxed{\frac{19\sqrt{13}}{13} = h'((1,2),\check v)}$

b) La función $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x,y) = (x^2+y^4)\sqrt{xy}$ admite en $(0,0)$ un punto de mínimo global (absoluto) en U

V $\quad f(0,0) = (0^2+0^4)\sqrt{0\cdot 0} = 0$

$f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in U$ pues $x^2 \geq 0$

$y^4 \geq 0$

$\sqrt{xy} \geq 0$

T2 a) Definir función potencial de un campo vectorial

Sea $\bar{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, si $\bar{f}$ es campo conservativo (requiere campo irrotacional)

entonces existe una función potencial tal que:

$$\bar{F}(\bar{x}) = \nabla \varphi(\bar{x})$$

$$\operatorname{dom}(\bar{F}) = \operatorname{dom}(\varphi)$$

b) Comprobar que el campo vectorial $\bar{F}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(2x, 2y)$ admite función potencial φ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sabiendo que $\varphi(1,0) = 3$, hallar la ecuación de la línea equipotencial que pase por el punto $(1,0)$

$$\bar{F}(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right) = (P, Q)$$

$$\left.\begin{array}{l} P'_y = \dfrac{-2x\,2y}{(x^2+y^2)^2} \\ Q'_x = \dfrac{-2y\,2x}{(x^2+y^2)^2} \end{array}\right\rangle = ✓ \quad \underbrace{\text{tiene matriz Jac. simétrica}} \Rightarrow \exists \varphi \,/\, \bar{F} = \nabla \varphi$$

$$\begin{cases} \varphi'_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{int. en } x} \varphi(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \alpha(y) \\ \varphi'_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{int. en } y} \varphi(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \beta(x) \end{cases}$$

$$\boxed{\varphi(x,y) = \ln(x^2+y^2) + C}$$

línea equip. que pase por $(1,0)$:

$$\varphi(1,0) = 3 \to \varphi(1,0) = 3 = \overbrace{\ln(1^2+0^2)}^{0} + C \to C = 3$$

$$\boxed{\varphi(x,y) = \ln(x^2+y^2) + 3}$$

$$\text{l. equip}: \varphi(1,0) = 3 = \underbrace{\ln(x^2+y^2) + 3}_{\ln(x^2+y^2) = 0} \to \boxed{C: x^2+y^2 = 1}$$

(P1) Calcular la circulación del campo $\bar{F}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$ a lo largo de la curva γ sabiendo que la matriz jacobiana de $\bar{F}$ es

$$DF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x & -2 \\ 2x & y^3 & 1 \\ x & 0 & z^2 \end{pmatrix} \quad y, \text{ además } \gamma: \begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2=y \end{cases}$$

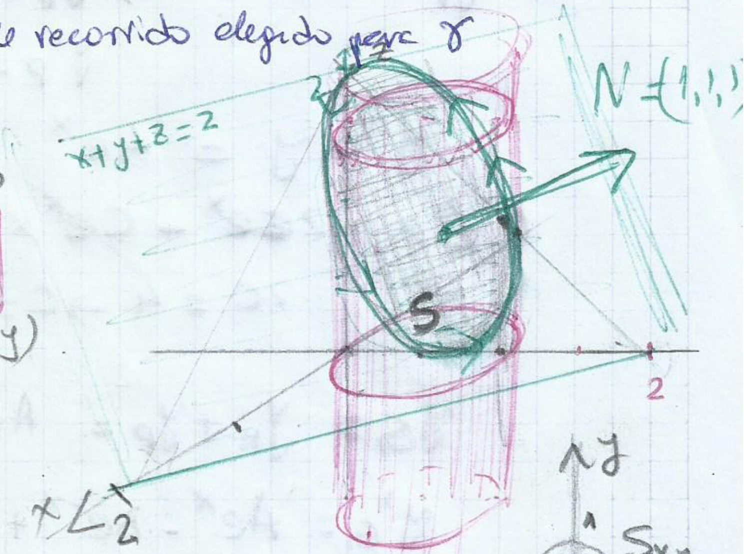
Indicar claramente el sentido de recorrido elegido para γ

$$\gamma: \begin{cases} \boxed{x+y+z=2} \rightarrow \text{plano} \\ x^2+y^2=y \rightarrow x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$$\boxed{x^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}}$$

proy en (x,y)

sup orientable



S es la porción del plano

$x+y+z=2$ con $x^2+y^2 \leq y$

C es la curva borde de S. → suave

$F \in C^1$ x enunciado $\Rightarrow \oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{\ell} = \iint_S \text{rot}(\bar{F})\, d\bar{S}$

$\bar{F}=(P,Q,R)$

$$\text{rot}(\bar{F}) = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y)$$

$$(0-1,\ -2-x,\ 2x-x) = \text{rot}(\bar{F})$$

$$Df = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix}$$

$$\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{\ell} = \iint_{S_{xy}} (-1,-2-x,x)(1,1,1)\, dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} -1-2-\cancel{x}+\cancel{x}\ dx\,dy = -3 \underbrace{\boxed{\iint_{S_{xy}} dx\,dy}}_{\text{Área de } S_{xy}} = -3 \cdot \pi \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{\ell} = -\frac{3}{4}\pi}$$

(P2) Hallar la ecuación cartesiana de la curva de solución de $y'' - y = 4e^x$ que pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente 2.

SH) $y'' - y = 0$

$r^2 - 1 = 0 \rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1$ $\boxed{y_H = Ae^x + Be^{-x}}$

SP) $y_P = Ce^x . x \rightarrow y'_P = Ce^x x + Ce^x$

$y''_P = Ce^x x + Ce^x + Ce^x$

$y'' - y = 4e^x$

$\cancel{Ce^x x} + 2Ce^x - \cancel{Ce^x x} = 4e^x$

$2C = 4 \rightarrow C = 2 \longrightarrow \boxed{y_P = 2e^x x}$

$y_G = y_H + y_P = Ae^x + Be^{-x} + 2xe^x$

$y'_G = Ae^x - Be^{-x} + 2e^x + 2xe^x$

$\Rightarrow$ "pasa por el origen de coord" $\Rightarrow x=0, y=0 \rightarrow y(0)=0$

"tiene pendiente 2" $\Rightarrow y'(0) = 2$

$y(0) = 0 = A + B$

$y'(0) = \cancel{2} = A - B + \cancel{2}$

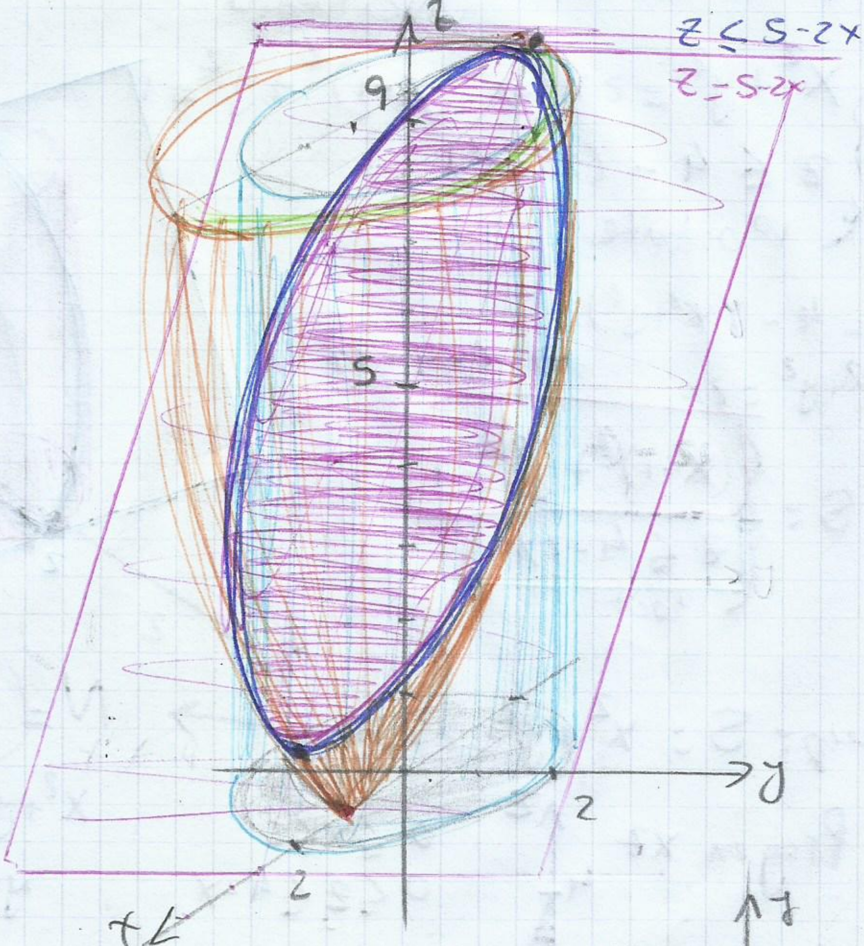
$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=0 \end{cases} \rightarrow A = 0 = B$

$$\boxed{y(x) = 2xe^x}$$

AM2 | Final | 15-7-25

(P3) Calcular el vol. del cuerpo $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x-1)^2+y^2\le z,\ z\le 5-2x\}$

$$H:\begin{cases}(x-1)^2+y^2\le z\\ z\le 5-2x\end{cases}$$



$(x-1)^2+y^2=5-2x$

$x^2-2x+1+y^2=5-2x$

$\boxed{x^2+y^2=4}$

proy en xy

$(x-1)^2=x^2-2x+1$

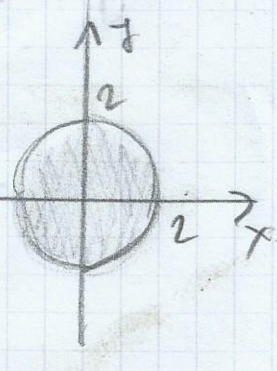
$(x-1)^2+y^2=$

$=x^2-2x+1+y^2=$

$=\underbrace{x^2+y^2}-2x+1$

$=r^2-2r\cos(t)+1$

$$\begin{cases}x=r\cos(t)\\ y=r\,\text{sen}(t)\\ z=z\end{cases}$$



$0\le r\le 2$

$0\le t\le 2\pi$

$r^2-2r\cos(t)+1\le z\le 5-2r\cos(t)$

Jac.

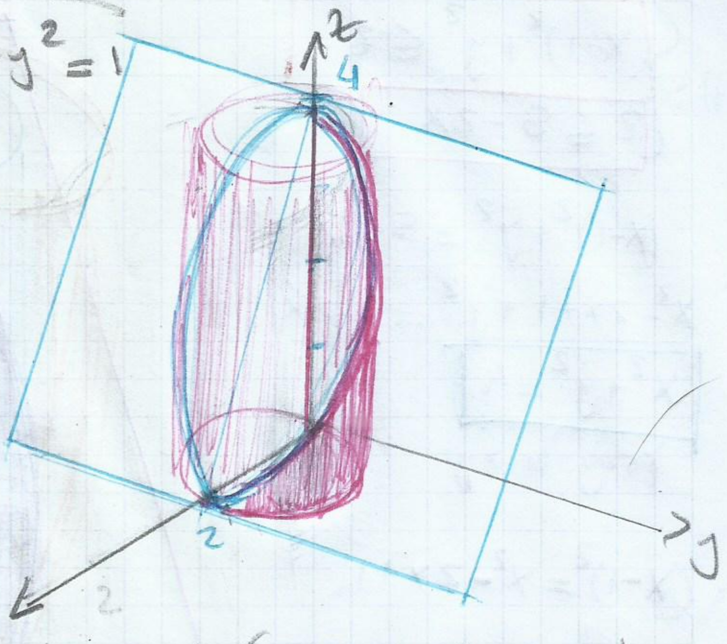
$$\text{Vol}_H=\iiint_H dx\,dy\,dz \overset{\text{C.V.}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2-2r\cos t+1}^{5-2r\cos(t)} r\,dz\,dr\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 r\big(\underbrace{5\cancel{-2r\cos(t)}-r^2+\cancel{2r\cos(t)}-1}_{4}\big)\,dr\,dt=\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r-r^3\,dr\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}4\,dt=\boxed{8\pi=\text{Vol}_H}$$

P4) Calcular el flujo del campo vectorial $\bar{F}(x,y,z) = (-y, x, xz)$ a través de la sup. abierta $x^2+y^2=2x$ con $z \leq 4-(x^2+y^2)$ en el primer octante

$$S: \begin{cases} x^2+y^2 = 2x \rightarrow \overbrace{(x-1)^2+y^2=1}^{\text{cilindro}} \\ z \leq 4-(x^2+y^2) \\ 1^{o} \text{ octante} \end{cases}$$



$$\begin{cases} z = 4-(x^2+y^2) \\ x^2+y^2 = 2x \end{cases} \rightarrow z = 4-2x$$

$$S: \begin{cases} \boxed{(x-1)^2+y^2=1} \\ \boxed{z \leq 4-2x} \\ 1^{o} \text{ oct} \end{cases}$$

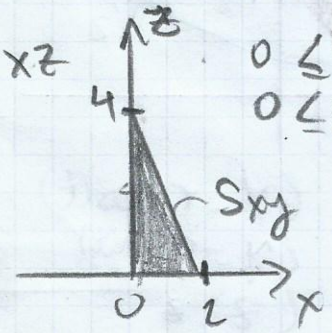
$$\text{Sup: } S: x^2+y^2-2x=0 \longrightarrow N = \left(\frac{2x-2}{2y}, \frac{2y}{2y}, \frac{0}{2y}\right)$$

$$x^2+y^2 = 2x$$

$$y^2 = 2x-x^2$$

$$y \geq 0 \quad y = \sqrt{2x-x^2}$$

Proy en xz



$$0 \leq x \leq 2$$
$$0 \leq z \leq 4-x$$

$$N = \left(\frac{x-1}{y}, 1, 0\right)$$

$$\iint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iint_{S_{xy}} \bar{F} \cdot N\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} (-y, x, xz)\left(\frac{x-1}{y}, 1, 0\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} \frac{-\cancel{y}(x-1)}{\cancel{y}} + x \, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} -\cancel{x}+1+\cancel{x} \, dx\,dy =$$

$$= -\underbrace{\boxed{\iint_{S_{xy}} dx\,dy}}_{\text{area } S_{xy}} = -\frac{2 \times 4}{2} = -4$$

$$\boxed{\iint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = 4}$$